数理解析研究所講究録
361巻 1979年 80-105

Rigid analytic spaces 入門

北大・理　森田康夫

kを自明でない非アルキメデス的付値$|\ |$に関し完備な体とします。例えば，p進体$\mathbb{Q}_p$や，$\mathbb{Q}_p$の代数的閉包の完備化$\mathbb{C}_p$は，このような体の例となっています。そこで

［問題］．このような体上の，analytic functions や，analytic spaces の理論を作れ。

という問題を考えます。このようなことは，単に形式的な一般化の可能性の追求という点のみではなく，実際に，整数論や，代数幾何での研究上必要であり，意味があります。例えば，筆者の場合には，p進Γ関数，とくにその無限遠点におけるStirlingの公式を研究するため，このような問題を研究することが必要となって来ました。

さて現在のところ，このようなことに関する一般論としては，(1). Tateの Rigid analytic spacesの理論と，(2). Krasnerによる Analytic functionsの理論が存在します。この2つは，

ある時には同値となりますが，一般には相異る結果を与えます。しかも，定義・結果の自然さ，cohomologies や duality 等の点，理論の一般性などの点から，Tate のものの方が優れているように思えます（[11] 参照）。そこで以下，(i) Tate の理論を紹介し，(ii) 1次元の場合を例としてより詳しく述べ，(iii) このようなことに関して残っている問題点にふれる，の3つのことを行います。

§1では，理論を構成する場合の基礎になる"アファイン環"の性質を述べます。§2では，"アファイン集合"の性質を述べます。§3では，この理論の一番重要な点である，はりあわせの仕方について述べます。§4では，応用上重要である Kiehl による proper map や Stein 性についての研究にふれます。また§5では，筆者による1次元の場合の詳しい研究の結果を紹介し，最後に§6で，open problems にふれます。

§1. 局所論 I（アファイン環の性質）.

k と $|\ |$ を序文で述べたような体とその非アルキメデス的付値とし，$k[[T_1, \cdots, T_n]]$ をその上の n 変数の形式的巾級数のなす環とします。そこで $k\{T_1, \cdots, T_n\}$ を，$k[[T_1, \cdots, T_n]]$

の元で

$$|T_1| \leqq 1,\ |T_2| \leqq 1,\ \cdots,\ |T_n| \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots (\text{☆})$$

の時収束するもの全体のなす k-subalgebra とします。この時 $k\{T_1, \cdots, T_n\} \ni f(T_1, \cdots, T_n) = \sum c_{\mu_1 \cdots \mu_n} T_1^{\mu_1} \cdots T^{\mu_n}$ に対し、

$$\|f\| = \mathrm{Max}\, |c_{\mu_1 \cdots \mu_n}|$$

とおくと、これは $k\{T\} = k\{T_1, \cdots, T_n\}$ のノルムを与え、これに関して $k\{T\}$ は完備，かつ $k\{T\}$ の任意の ideal は closed となります。

$\boxed{\text{定義}}$ A を k-algebra とします。この時，A は上記のような環 $k\{T_1, \cdots, T_n\}$ の剰余環と同型になるなら，k上 <u>topolgically of finite type</u>（<u>$t.f.t$</u> と略する）であると言う。

この時 A は，$k\{T\}$ の剰余環として，自然な位相をもちます。

$\boxed{\text{定理}}$. A，B は，共に k上 $t.f.t$ であるとする。この時

(1). A は，ある $k\{T_1, \cdots, T_m\}$ と同型な部分環上，有限拡大となる。（正規化定理）

(2). A は，Noether 環で，すべての ideal は閉である。

(3). $A \longrightarrow B$ なる任意の algebra の準同型は，常に連続となる。

（注意）k の距離 $d(x, y) = |x - y|$ は，ultrametric ですから，

上記の $k\{T\}$ の定義に出てきた集合(☆)は，open かつ closed になっています。また(☆)において等号を入れたため，A は Noether 環になるなど，好都合な結果が得られています。

さて A を t.f.t. over k であるとし，

$$\mathrm{Max}(A) = \{ x \subsetneqq A \mid \text{maximal ideals} \}$$

とおきます。この時 $x \in \mathrm{Max}(A)$ につき，その剰余体 $k(x)$ は，k の有限次拡大体となります。また

$\boxed{\text{定理}}$ A を k 上 t.f.t. とし，$f \in A$ とする，この時

(1). すべての $x \in \mathrm{Max}(A)$ に対し，$f(x) = f \text{ modulo } x \in k(x)$ が 0 となるための必要十分条件は，f が nilpotent となることである。（Hilbert の零点定理）

(2). $x_0 \in \mathrm{Max}(A)$ で

$$\sup_{x \in \mathrm{Max}(A)} |f(x)| = |f(x_0)|$$

なるものが存在する。また A が reduced なら，この値を $\|f\|$ とおくと，A の位相は，このノルムにより与えられる。

が成り立ちます。その他，この様な環に対する Weierstraß の予備定理なども知られています。

§2. 局所論 II （アファイン集合）

前節で定義した，k 上 t.f.t. なる環 A より作った $\mathrm{Max}(A)$

の形の集合を、我々は、<u>アファイン集合</u>と呼びます。また
アファイン集合 $X = \mathrm{Max}(A)$ の部分集合 Y は、k 上 affinoid なる環のカテゴリーから集合のカテゴリーへの

$$B \longrightarrow Y(B) = \{ f : A \longrightarrow B \mid \text{morphism},\ f^*(\mathrm{Max}(B)) \subseteq Y \}$$

なるファンクターが representable の時、X の<u>アファイン部分集合</u>であると言います。

(例) A, X 等を上の通りとし、f_i, g_j を A の有限個の元とします。この時

$$Y = \{ x \in X \mid |f_i(x)| \leqq 1,\ |g_j(x)| \geqq 1 \}$$

とおくと、$B \longrightarrow Y(B)$ は

$$A\{T_i, S_j\}/(f_i - T_i,\ 1 - g_j S_j)$$

なる環によって represent されます ($A\{T_i, S_j\}$ は、$k\{T\}$ と同様にして定義します)。したがって Y は、X のアファイン部分集合となります。この形の部分集合を、<u>特殊アファイン部分集合</u>と呼びます。

$\boxed{\text{命題}}$ A, X を上の通りとし、Y を X のアファイン部分集合とします。この時

(1) $f : A \longrightarrow B$ を k 上 affinoid なる環の間の algebra の準同型とする時、これによる引き戻し $(f^*)^{-1}(Y)$ は $\mathrm{Max}(B)$ のアファイン部分集合となる。

(2) Z を Y のアファイン部分集合とする時、Z は X の中でも

アファイン部分集合となる。

さてここまで、我々はアファイン集合 $X = \mathrm{Max}(A)$ を、単なる集合として扱ってきましたが、これに次のようにして位相を導入します。

$X \ni x_0$ の基本近傍系として、任意の $\varepsilon > 0$ と、任意の有限個の A の元 $g_1, \cdots, g_n$ で $g_1(x_0) = \cdots = g_n(x_0) = 0$ となるものに対し、

$\{ x \in \mathrm{Max}(A) \mid |g_i(x)| < \varepsilon \quad (i = 1, \cdots, n) \}$

なるもの全体を取ります。

このようにして定めた位相は、X の特殊アファイン部分集合全体を閉集合全体の基底とする X の位相とも一致します。ところが、X の特殊アファイン部分集合 $Y = \mathrm{Max}(B)$ に対し、環 B を対応させる対応は、X のこの位相に関する準層をなします。そこでこの準層 $Y = \mathrm{Max}(B) \, (\subseteq X = \mathrm{Max}(A))$ $\longrightarrow B$ に付随する層を $\tilde{A}$ であらわします。これにより、アファイン集合 $X = \mathrm{Max}(A)$ は、ringed space の構造をもちます。

さて特に k が代数的閉体の場合には、H. Cartan らの意味での analytic spaces の概念は、局所的にアファイン空間 $(X, \tilde{A})$ と同型な ringed spaces の概念と一致します。そこで、一般の k に対しても、以下アファイン空間 $(X, \tilde{A})$ と局所的に同型と

なる ringed space を以下 <u>analytic space</u>（Tate の用語では wobby analytic space）と呼びます。しかし、この意味での analytic space は、k が完全非連結のため、非常にばらばらな空間となっています。そのため、次節でこれを修正して一致の定理等が成り立つ正しい空間を作るわけです。

§3. 大域論（Rigid analytic spaces の定義）

以下我々は、ばらばらではなく、rigid な analytic spaces の理論を作るため、次のように考えます。

まずアファイン空間の間の前節の意味での analytic morphism がいつ rigid であるべきかを考えます。答は明らかに、「$\varphi : \mathrm{Max}(B) \longrightarrow \mathrm{Max}(A)$ は、ある algebra の準同型 $f : A \longrightarrow B$ よりひき起し写像 f^* として φ が出来ている場合に限り、<u>rigid</u> である」となります。また rigid analytic spaces は局所的に、アファイン空間であるべきこと、さらに rigid であるという概念は、合成に関して安定であるべきことから、まず次のように定義します。

$\boxed{\text{定義}}$ X を analytic space とします。この時 X 上の <u>k-structure</u> θ とは、k 上 tft なる algebra A に対し、$\mathrm{Max}(A)$ から X への ringed spaces としての morphisms 全体の部分集合

$X^\theta(A)$ を対応させるもので、次の性質をもつものとする。（以下 $X^\theta(A)$ の元を、<u>structural</u> であるということにします。）

(1) 任意の X の点 x に対し、あるアファイン空間 $\mathrm{Max}(A)$ から X への ringed spaces の open immersion で、structural, かつ x がその像に含まれるものが存在する。

(2) $\mathrm{Max}(B) \longrightarrow \mathrm{Max}(A)$ が rigid で、かつ $\mathrm{Max}(A) \longrightarrow X$ が structural なら、合成 $\mathrm{Max}(B) \longrightarrow X$ も structural である。

以下、h-structure をもった analytic space を、<u>h-space</u> と呼びます。また h-spaces の間の ringed spaces としての morphism $f: X \longrightarrow Y$ は、$\mathrm{Max}(A) \longrightarrow X$ なる任意の structural な morphism との合成がまた structural となる時に、<u>h-morphism</u> であると言います。

（注意）以上の (1), (2) だけでは、まだ仮定が弱すぎ、例えば $\mathrm{Max}(A) \longrightarrow X$ なる ringed spaces の morphism は、すべて structural であるとしても、(1), (2) を満します。これでは、しょうがないので、以下仮定を強めます。

上の例はつまりませんが、以下使われる役に立つ例としては、次の2つがあります。

（例） θ を analytic space X の上の h-structure とし、U を X の open subset とします。この時 $U^\theta(A)$ として、$\mathrm{Max}(A) \to U$ なる ringed spaces の morphism で、$U \hookrightarrow X$ と合成すると

$X^{\theta}(A)$の元となるようなもの全体を取ります。この時θ'は、Uの上のh-structureとなります。これをXのopen subset U上のinduced h-structureと呼び、また(U, θ')は(X, θ)のopen h-subspaceであると言います。induced h-structure、又はopen h-subspaceであるという概念は、推移律をみたします。

(例) $X = \mathrm{Max}(A)$とし、$X^{\theta}(B)$として$\mathrm{Max}(B)$から、Xへのrigidなringed spacesのmorphismsの全体を取ります。この時θはX上のh-structureとなります。これをアファイン空間X上のcanonical h-structureと呼びます。またこのような(X, θ)と同型になるh-spaceを、アファインであると言います。canonical h-structureは、そのアファイン部分空間に、canonical h-structureを引きおこします。

(注意) $\mathrm{Max}(A) \longrightarrow X$なるアファイン空間よりのringed spacesのmorphismは、structuralな時に限りh-morphismとなります。とくにX自身アファインである時は、rigidであることとも一致します。

次にh-spaceに対する仮定を強め、またh-spaceに対し、それに付随するGrothendieck Topologyを定義するため、次の定義を行います。

定義　Xをh-spaceとします。この時

(1) X が <u>special</u> であるとは，任意のアファイン h-space Y と，その任意の有限個のアファイン部分集合による covering $\{Y_i\}$ につき，ringed space の morphism $f: Y \longrightarrow X$ が h-morphism になるためには，f の各 Y_i への制限が h-morphism となることが必要十分であるときをいう。

(2) X の open covering $\mathfrak{X}$ が <u>admissible</u> であるとは，任意のアファイン h-space Y と，任意の $f: Y \longrightarrow X$ なる h-morphism につき，$f^{-1}(\mathfrak{X})$ なる Y の open covering が，有限個のアファイン部分集合による covering に細分されうるときをいう。

(例) アファイン h-space は，special になります。また アファイン h-space の open covering は，有限個のアファイン部分集合による covering に細分される時，かつその時に限り，admissible となります。

(注意) Tate の原論文では，以上において「有限個のアファイン部分集合による covering」となっている所が，special covering となっていますが，Gerritzen-Grauert [3] の結果により，こう言うふうに言い直してもかまいません。

(注意) special な h-space の，open h-subspace は，また special になります。

以下，h-space X に対し，X の open covering で admissible なもの全体を $\mathfrak{T}(X)$ であらわします。この時

$\boxed{\text{定理}}$ (1). $\mathfrak{T}(X)$ は、<u>Grothendieck topology</u> である。つまり次の3つが成り立つ。

(イ) X の X 自身による covering $\{X\}$ は $\mathfrak{T}(X)$ に入る。

(ロ) $\{X_i\}_i \in \mathfrak{T}(X)$ かつ $\{X_{ij}\}_j \in \mathfrak{T}(X_i)$ なら $\{X_{ij}\}_{i,j} \in \mathfrak{T}(X)$。

(ハ) $\{X_i\}_i \in \mathfrak{T}(X)$ かつ Y が X の open h-subspace なら、$\{Y \cap X_i\}_i \in \mathfrak{T}(Y)$ となる。

(2). h-morphism は、この Grothendieck topology に関して、<u>連続</u>である。つまり $\{X_i\} \in \mathfrak{T}(X)$ かつ $f: Y \longrightarrow X$ が h-morphism なら、$\{f^{-1}(X_i)\} \in \mathfrak{T}(Y)$ となる。

(3). special な h-space への h-morphism は、その Grothendieck topology に関する <u>local property</u> である。つまり、X を h-space, Z を special な h-space, $f: X \longrightarrow Z$ を ringed spaces の間の morphism, $\{X_i\} \in \mathfrak{T}(X)$ とする。この時 f が h-morphism であるためには、f の各 X_i への制限が h-morphism であることが必要十分である。

また special な h-space を構成するためには、次の定理が便利です。

$\boxed{\text{定理}}$ X を analytic space, $\mathfrak{X} = \{X_i\}$ をその open covering とします。各 X_i 上の special な h-structure θ_i で、$X_i \cap X_j$ 上 $\theta_i = \theta_j$ となるものが与えられたとします。この時 X 上の special な h-structure θ で、$\mathfrak{X}$ は θ に関し admissible となり、かつ

各 X_i 上 $\theta = \theta_i$ となるものが唯一つ存在する。

以上のことを考えて、我々は次のようにして rigid analytic spaces を定義します。

$\boxed{\text{定義}}$ X を special な h-space とします。この時、X の、アファインな open h-subspace による admissible covering $\mathfrak{X} = \{X_i\}$ が存在するなら、X は <u>semi-rigid</u> であると言います。さらに $X_i \cap X_j$ も semi-rigid である時、X は <u>rigid</u> である、または、X は <u>rigid analytic space</u> であると言います。rigid analytic spaces の全体は、h-morphisms を morphisms として、category を成します。

（注意） X が semi-rigid となるべきことは当然ですが、$X_i \cap X_j$ については議論の余地のある所で、例えば、$X_i \cap X_j$ は、X_i および X_j の中でアファイン open h-subspace となっていることを仮定した方が良いかも知れません。

さて X を rigid analytic space とします。この時 X は、ringed space としての構造の他に、前ページの定理により、自然な Grothendieck topology をもちます。さらに、rigid analytic spaces の間の morphisms は、この Grothendieck topology に関して連続となります。また、この Grothendieck topology に対応して <u>sheaf theory</u> が構成できますが、前ページの定理により、rigid analytic spaces の間の morphisms や、rigid analytic

な構造自身，このGrothendieck topologiesに関するsheaf propertities（local propertities）となっています。

X を rigid analytic space，a を $|a|>1$ なる k の元とします。この時 $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$k\{z/a^{n+1}\}\ni\sum c_m(z/a^{n+1})^m\longrightarrow\sum(c_m/a^m)(z/a^n)^m\in k\{z/a^n\}$$

なるalgebraの準同型より

$$k_n^*=\mathrm{Max}(k\{z/a^n\})\longrightarrow k_{n+1}^*=\mathrm{Max}(k\{z/a^{n+1}\})$$

なるうめ込みを作り，これにより k_n^* の上のcanonical h-structureをはりあわせて，$k^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}k_n^*$ をrigid analytic spaceとします。k がとくに代数的閉体なら，これらは $k_n=\{z\in k\mid |z|\leqq|a^n|\}$ および k と同一視できます。そこで X のopen subset D に対し

$$\mathcal{O}(D)=\{f:D\longrightarrow k^*\mid h\text{-morphism}\}$$

とおきます。この時 $D\longmapsto\mathcal{O}(D)$ は，我々のGrothendieck topology $\mathcal{T}(X)$ に関するsheafを成します。これを我々は $\mathcal{O}_X$ であらわし，X の<u>structure sheaf</u>とよびます。

（注意）以上 k^* を作った操作を修正することにより，任意の<u>k 上のalgebraic varietyは，自然に，k 上のrigid analytic spaceとみなせる</u>ことがわかります。

（注意）D がアファイン h-space $\mathrm{Max}(A)$ なら，$\mathcal{O}(D)=A$ となります。

§4. Kiehl の仕事（Stein 性 と proper maps）

X を rigid analytic space とします。この時

$\boxed{\text{定義}}$ X は、次のような列 $X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq X_3 \subsetneqq \cdots \subsetneqq X_n \subsetneqq \cdots \subsetneqq X$ が取れる時 quasi-Stein space であると言います。

(1) X_n は X の open かつアファインな部分集合である。

(2) $\{X_n\}$ は、X の admissible covering である。

(3) $\mathcal{O}(X_{n+1})$ の、$\mathcal{O}(X_n)$ の中への制限写像の像は、$\mathcal{O}(X_n)$ の中で dense となっている。

定義から明らかなように、アファイン空間は quasi-Stein となっています。

さて X の Grothendieck topology $\mathcal{T}(X)$ に関しても、通常の場合と同様にして連接層の概念が定義できます。これに関し、Tate と Kiehl は、次の結果を得ています。

$\boxed{\text{定理}}$ X を quasi-Stein space，$\mathcal{F}$ を X の Grothendieck topology に関する連接層とします。この時

(1) $\mathcal{F}(X)$ の $\mathcal{F}(X_n)$ の中への制限写像の像は dense である。

(2) cohomology $H^i(X, \mathcal{F})$ は、$i \geqq 1$ の時に消える。

(3) X の各点 x において、germ $\mathcal{F}_x$ は、$\mathcal{O}_{X,x}$ - module として、global sections $\mathcal{F}(X)$ によって生成される。

（注意）我々は、X のすべての open subsets を使う代りに、

$\mathfrak{J}(X)$ に入る coverings のみに関し sheaf conditions を仮定して, sheaf theory や cohomology theory 等を作っています(Artin[1] 参照)。したがって, 上記の定理は, X の quasi-Stein subsets による admissible covering $\mathfrak{X}$ に対しては, $\mathcal{F}$ の covering cohomology $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ が $i \geq 1$ の時に消えることを保証しますが, admissible でない covering に関しては, 何も言っていません。

X をアファイン空間とし, Y をその open かつアファインな部分集合とします。この時, ある $0 \lneqq a \lneqq 1$ なる数 a と, ある

$$X \hookrightarrow \mathrm{Max}(k\{T_1, \cdots, T_n\}) = Z$$

なる closed immersion で

$$Y \subseteq Z_a = \{ z \in Z \mid |T_i(z)| \leq a \quad (i=1, \cdots, n) \}$$

なるものが存在する時, $Y \subset\subset X$ とあらわします。この時

$\boxed{\text{定義}}$ $f: X \longrightarrow Y$ なる rigid analytic spaces の morphism は, 次の条件を満すとき, <u>proper</u> であるという。

(1) f は separable である。つまり, f のひきおこす diagonal embedding $\Delta: X \longrightarrow Y \times_X X$ は, closed immersion である。

(2) Y の open affine subsets による admissible covering $\{Y_i\}$ で, 各 i に対し, $f^{-1}(Y_i)$ の有限個のアファイン集合による admissible coverings $\{U_{i,j}\}_j$ と $\{V_{i,j}\}_j$ で, $U_{ij} \subset\subset V_{ij}$ なるものが存在する。

Kiehl は、このとき、次の定理を証明しました。

$\boxed{\text{定理}}$ $f: X \longrightarrow Y$ を、rigid analytic spaces の間の proper morphism, $\mathcal{G}$ を coherent $\mathcal{O}_X$-module とする。この時 $\mathcal{G}$ の f による direct image $R^i f_*(\mathcal{G})$ は coherent $\mathcal{O}_Y$-module となる。

この定理より、通常の場合と同様に、GAGA-type の結果が出ることもわかっています。

§5. $D \subsetneqq \mathbb{P}^1(k)$ (open subset) の場合

以下§5では、<u>kは代数的閉体</u>だと仮定します。したがって§3末の $\mathcal{O}$ の定義等に出て来た k^* は、k と同一視できます。

$\mathbb{P}^1(k)$ を k 上の1次元射影空間とし、通常の場合と同様にして、$\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$ と同一視します。この時

$$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \leqq 1\} = \mathrm{Max}(k\{z\})$$

$$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \geqq 1\} = \mathrm{Max}(k\{1/z\})$$

と同一視でき、さらにその交りは

$$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| = 1\} \cong \mathrm{Max}(k\{x, y\}/(xy-1))$$

となっています。したがって、$\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \leqq 1\}$ と $\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z| \geqq 1\}$ の canonical structures をはりあわせ、$\mathbb{P}^1(k)$ を rigid analytic space に出来ます。$\mathbb{P}^1(k)$ のこの構

造は、1次分数変換 $PGL(2,k)$ で不変であり，かつその open subset k 上には，$k^* = k$ として入る前記の構造を induce します。

D を $\mathbb{P}^1(k)$ の open subset とします。この時，$\mathbb{P}^1(k)$ の上記の構造は，D の上に h-structure を導きます。以下我々は，この h-space D の性質を調べます。

D を $\mathbb{P}^1(k)$ の open subset とします。この時，Grauert は，D がアファイン部分集合になるためには，次の形の集合の有限和となることが必要十分なことを証明しています。

(1) 1点

(2) $\{z \in k \mid |z-a| \leqq r,\ |z-a_i| \geqq r_i \ (i=1,\cdots,n)\}$

$$(a, a_i \in k,\quad r, r_i \in |k^\times|,\quad 0 \leqq n < +\infty)$$

(3) $\{z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z-a_i| \geqq r_i \ (i=1,\cdots,n)\}$

$$(a_i \in k,\quad r_i \in |k^\times|,\quad 1 \leqq n < +\infty)$$

そこで，以下，(2) 又は (3) の形の $\phi \neq U \subsetneqq \mathbb{P}^1(k)$ なる集合を，<u>connected open affine subset</u>（coa と略す）と言います。この時，次の定理が成り立ちます。

$\boxed{\text{定理}}$ $D \subseteqq \mathbb{P}^1(k)$ (open subset) とし，$\mathfrak{D}$ を D の open covering とします。この時，$\mathfrak{D}$ は，任意の D に含まれる connected open affine subset U に対し，$\mathfrak{D}|U$ なる $\mathfrak{D}$ の U への制限が，有限個の connected open affine subsets による

covering に細分できる時，かつその時に限り，admissible となります。

これより系として，次のことがわかります。

$\boxed{\text{系 1}}$ Dのすべての connected open affine subsets による covering $\mathcal{D}$ は，Dの admissible covering である。

$\boxed{\text{系 2}}$ $f: D \longrightarrow k$ なる写像が rigid analytic，つまり $\mathcal{O}(D)$ に入るための必要十分条件は，Dに入る任意の connected open affine subset Uに対し，それを前ページの(2)または(3)の形に書いた時，fのUへの制限が

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(\infty)} (z-a)^m + \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=-1}^{-\infty} C_m^{(i)} (z-a_i)^m & \cdots\cdots (2)\text{のとき} \\ C^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=-1}^{-\infty} C_m^{(i)} (z-a_i)^m & \cdots\cdots (3)\text{のとき} \end{cases}$$

と，(k係数の)一様収束する級数に展開できることである。

さて系1より，特にこのようなDは，admissible covering をもつ，rigid analytic space となります。そこで，次に，Dをその Grothendieck Topology $\mathcal{T}(D)$ を使って連結成分に分けることを考えます。そのため，我々は，Dが，

$$D', D'' \subseteq D \text{ (open)},\ D' \cap D'' = \phi,\ D' \cup D'' = D,\ \{D', D''\} \in \mathcal{T}(D)$$
$$\Longrightarrow D' \text{ or } D'' = \phi$$

となる時，連結であると言うことにします。このとき

$\boxed{\text{定理}}$ $D \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ (open subset) とする。この時以下は同値である。

(1) Dは$\mathfrak{d}(D)$に関し連結である.

(2) Dの connected open affine subsets による open covering $\mathcal{D}$で, 次の性質をもつものが存在する: $\mathcal{D}$の任意の2元U, U'に対し, 有限個の$\mathcal{D}$の元$U_1, U_2, \cdots, U_n$で, $U_1 = U$, $U_n = U'$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \phi$ $(i=1, \cdots, n)$なるものが存在する.

(3) Dは, cngc である。つまり, (イ) Dは少くとも2点を含み, (ロ) 任意の $a, b \in D$, $a \neq \infty$ に対し

$$\# \{ |a-z| \mid z \in \mathbb{P}^1(k) \setminus D, \ |a-z| \leqq |a-b| \} < +\infty,$$

かつ (ハ) 任意の $a \in D$, $r \in |k^\times|$, $r \leqq \sup_{x,y \in D} |x-y|$ に対し, $C = \{ z \in k \mid |z-a| \leqq r \}$ とおく時, $D^c \cap C$ は有限個の $\{ z \in k \mid |z-a'| < r \}$ の形の開円板でおおわれる。

(4) D上の rigid analytic な関数に対して, 通常の形の一致の定理が成り立つ。

さらに, 我々は, 上の定理の(2)を, 次のように強めることが出来ます。

定理 Dを, $\phi \neq D \subsetneqq \mathbb{P}^1(k)$なる$\mathbb{P}^1(k)$の open かつ $\mathfrak{d}(D)$に関し連結な部分集合とする。この時 $D_1 \subsetneqq D_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq D_n \subsetneqq \cdots \subsetneqq D$ なる列で次の性質をもつものが存在する。

(1) D_nはDの connected open affine subset である.

(2) $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

(3) 各D_nの任意の穴は, 常にD^cと交る。

さらに、このような列$\{D_n\}$はDのadmissible coveringであり、かつ任意のこのような2列は、互に(包含関係に関して)cofinalとなる。

以上のことより、$P^1(k)$の任意のopen subset Dがあたえられた時、Dをまず$\mathfrak{T}(D)$に関し$\coprod_i D_i$と連結成分に分け、さらに各連結成分に関しては、上記の定理を使って調べることが出来ます。以下このような方針で、近似定理と、cohomologiesについて調べます。

D, D'を$P^1(k)$のopenかつ$\mathfrak{T}$に関して連結な部分集合で、$D \subsetneqq D'$なるものとします。そこで制限写像

$$\mathcal{O}(D') \ni f \longrightarrow f|D \in \mathcal{O}(D)$$

について、以下の2つの問題を考えます。

(1) この写像の像は、D上の一様収束位相に関して、いつdenseとなるか？

(2) $\{D_n\}$を前定理のように取る時、この写像の像は、各D_n上の一様収束位相(D上の"広義一様収束"位相)に関し、いつdenseとなるか？

我々は、問1については必要十分条件を、問2については、(ほとんど必要十分条件となる)十分条件をあたえることが出来ます。この(2)に対する答の特殊な場合として、次の定理が得られます。([10]参照)

$\boxed{\text{定理}}$ Dを$D \subsetneq \mathbb{P}^1(k)$なるopen subsetで，$\mathfrak{T}(D)$に関し連結なものとする。この時$f : D \longrightarrow k$なる写像がrigid analyticとなるための必要十分条件は，Dにpoleをもたないk-係数の有理関数から成る列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$で，各D_m（$\{D_m\}$は前の通りとする）上で，$n \longrightarrow \infty$とする時，$f_n(z)$は$f(z)$に一様収束するものが取れることである。

したがって我々の場合にも Rungeの定理が成り立っています。

Dを$\mathbb{P}^1(k)$の真のopen subsetで，$\mathfrak{T}(D)$に関して連結なものとします。列$\{D_n\}$を前のように取ります。この時明らかにDはquasi-Steinの条件(1), (2)を満しますが，$\{D_n\}$の性質の(3)より，quasi-Steinの条件の(3)も成り立ちます。よって

$\boxed{\text{定理}}$ Dを，$D \subsetneq \mathbb{P}^1(k)$なるopen subsetで，$\mathfrak{T}(D)$に関して連結であるとする。このとき$D$は，quasi-Stein spaceとなる。

これより特に

$\boxed{\text{系}}$ Dを，$D \subsetneq \mathbb{P}^1(k)$なるopen subsetとし，$\mathcal{F}$を$D$上の$\mathfrak{T}(D)$に関する連接層とします。この時cohomology $H^i(D, \mathcal{F})$は，$i \geq 1$の時に消える。

またcovering cohomologyに関しては，次のような結果が得られます。

Dを$\mathbb{P}^1(k)$のopen subset，$\mathfrak{U}$をそのopen covering，$\mathcal{F}$を

D上の$\mathfrak{I}(D)$に関する連接層とします。さらに我々は、(1) $\mathfrak{U}$は高々可算個の元より成る，(2) どの$U \in \mathfrak{U}$も高々可算個の連結成分しかもたない，(3) $D = \mathbb{P}^1(k)$の時は$\mathfrak{F} = \mathcal{O}_D$である，の三つを仮定します。このとき

$\boxed{\text{定理}}$ 上の条件のもとで，covering cohomology $H^i(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$は，$i \geq 1$の時消える。

とくに

$\boxed{\text{系}}$ D_1, D_2を$\mathbb{P}^1(k)$のopen subsetsで，$\mathfrak{I}$に関して連結，かつ$D_1 \cap D_2 \neq \phi$なるものとする。この時，任意の$f \in \mathcal{O}(D_1 \cap D_2)$に対し，$g \in \mathcal{O}(D_1)$と$h \in \mathcal{O}(D_2)$で

$$f(z) = g(z) + h(z) \qquad \text{on } D_1 \cap D_2$$

なるものが存在する。

この系において，$\{D_1, D_2\}$は，$D_1 \cup D_2$のadmissible coveringでなくても良いことに注意しておきます。

§6. その他，問題など

以下，こういう事に関し，残っている問題を，いくつか上げておきます。

(A) k上1次元のproperなrigid analytic spaceは，projectiveとなることがわかっています(Gerritzen - Grauert [3] 参照)。そ

こで

［問題］ 2次元の場合はどうなるか？ 分類せよ。

が考えられます。結果は、大体 complex の場合と似たものになると思われますが、ある種のものが実際に存在することを示すのは、場合によっては難しくなるものと思われます。例えば、k上では、Hopf surface は、$\mathbb{C}$ の場合と同様にして作れますが、complex torus に当るものを扱うには、多少工夫がいります。

(B) Stein space について、complex の場合と同様な、特徴づけは出来るか？ また、実用上便利な、Stein space となるための十分条件を求めよ。

(C) universal covering に当るものは、どうすれば良いか？ このような体上の保型関数の理論はあるが（Roquette [13], Gerritzen [2] など参照）、現在のところ、elliptic curve の場合、bad reduction をもつ場合は扱えるが、good reduction をもつ場合は扱えない。

(D) rigid analytic space の Grothendieck topology は、一般には、計算するのが容易でない。しかし1次元の場合は、p.17 の定理のように簡単になっています。この原因は、$f: \mathrm{Max}(A) \longrightarrow \mathrm{Max}(B)$ のアファイン空間の間の rigid な map の像が、$B = k\{z\}$（一変数，kは代数的閉体）の場合

には、$\mathrm{Max}(k\{z\})$のアファイン部分空間となる点にあります。そこで同様のことが、一般の場合にも成り立つかを問います。少くとも、現在のところ、反例は知られていないようです。

References

[1] Artin, M.: Grothendieck topologies, Lecture note at Harvard University, 1962.

[2] Gerritzen, L.: Zur nichtarchimedischen Uniformisierung von Kurven, Math. Ann., 210 (1974), 321-337.

[3] Gerritzen, L., Grauert, H.: Die Azyklität der affinoiden Überdeckungen. In: Global Analisis, pp. 159-184. Tokyo-Princeton: U. of Tokyo P., Princeton U. P. 1969.

[4] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris 1958.

[5] Grauert, H.: Affinoide Überdeckungen eindimentionaler affinoider Räume, Publ. Math. I.H.E.S., 34 (1968), 1-36.

[6] Grauert, H., Remmert, R.: Nichtarchimedischer Funktionentheorie. In: Weierstrass-Festband, pp. 393-476. Opladen: Westdeutscher Verlag 1966.

[7] Kiehl, R.: Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inventiones math., 2 (1967), 191-214.

[8] ________: Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inventiones math., 2 (1967), 256-273.

[9] Krasner, M.: Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la methode des éléments analytiques quasi-connexes, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 39-40 (1974), 131-254.

[10] Morita, Y.: Analitic functions on an open subset of $\mathbf{P}^1(k)$, to appear.

[11] ________: Krasner's analytic functions and rigid analytic spaces. In: Proceedings of the conference on p-adic analysis held in Nijmegen, the Netherlands, pp. 134-142. Nijmegen, the Netherlands: The Catholic University of Nijmegen 1978.

[12] ________: On the induced h-structure on an open subset of the rigid analytic space $\mathbf{P}^1(k)$, to appear.

[13] Roquette, P.: Analytic theory of elliptic functions over local fields. Hamb. Math. Einzelschriften, Neue Folge n°1. Vandenhoeck und Ruprecht in Göttingen (1970).

[14] Tate, J.: Rigid analytic spaces, Inventiones math., 12 (1971), 257-289.